سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

$y_{min} = -|a| + ۲ = ۰ \Rightarrow |a| = ۲$

با توجه به نمودار، $\frac{۵}{۲}$ دورهٔ تناوب این تابع برابر $\frac{۸}{۳} - (-\frac{۲}{۳}) = \frac{۱۰}{۳}$ است؛ در نتیجه داریم: $\frac{۵}{۲}T = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲\times۱۰}{۵\times۳} = \frac{۴}{۳}$

از طرفی دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $\frac{۲}{|b|} = \frac{۲\pi}{|b|\pi}$.

$\Rightarrow \frac{۲}{|b|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow |ab| = |a|\,|b| = ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

ضابطهٔ تابع به‌صورت روبه‌رو می‌شود: $f(x) = a + b\cos(c\pi x)$

$\frac{T}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow T = ۳ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|c\pi|} = ۳ \Rightarrow c = \pm\frac{۲}{۳}$

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = -۷ \Rightarrow a + b = -۷ \\ f(\frac{۳}{۲}) = ۱ \Rightarrow a - b = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = -۴ \end{cases} \Rightarrow a.b = ۱۲$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$y_{max} = ۰ \Rightarrow |a| - ۱ = ۰ \Rightarrow a = \pm۱$

با توجه به نزولی بودن تابع f در حوالی $x = ۰$، مقدار $a = -۱$ قابل قبول است. از طرفی $f(\frac{\pi}{۳}) = -۲$ پس:

$-\cos(\frac{\pi}{۳} - b) - ۱ = -۲ \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۳} - b) = ۱ \xrightarrow{۰ < b < \pi} b = \frac{\pi}{۳}$

در نتیجه: $ab = -\frac{\pi}{۳}$

$\Rightarrow (ab)^a = (-\frac{\pi}{۳})^{-۱} = \frac{-۳}{\pi}$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

کم‌ترین مقدار تابع $y = a\cos\theta$ با فرض $a > ۰$ برابر $(-a)$ است، پس با توجه به نمودار تابع، داریم: $a = \frac{۵}{۲}$.

هم‌چنین نمودار تابع، محور xها را با طول $\frac{۷\pi}{۱۸}$ قطع کرده است، لذا داریم:

$$f(\frac{۷\pi}{۱۸}) = ۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}\cos(۳ \times \frac{۷\pi}{۱۸} + b) = ۰ \Rightarrow \cos(\frac{۷\pi}{۶} + b) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۷\pi}{۶} + b = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (k \in Z)$$

$$b = k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow[k=۱]{۰<b<\pi} b = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow f(x) = \frac{۵}{۲}\cos(۳x + \frac{\pi}{۳})$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{تلاقی با محور y ها}} f(۰) = \frac{۵}{۲}\cos(۰ + \frac{\pi}{۳}) = \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

نکته: در تابع $y = a\sin(bx + x_۰) + c$، دوره تناوب $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم برابر $|a| + c$ است. ابتدا مقدار و علامت a را تعیین می‌کنیم:

$$y_{max} = |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

$$f(۰) = a\sin(\frac{\pi}{۶}) = \frac{a}{۲} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \xrightarrow{a=\pm ۱} a = -۱$$

از طرفی نمودار تابع در بازه $[۰, ۲\pi]$، ۳ بار تکرار شده است. بنابراین داریم:

$$۳T = ۲\pi \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

با توجه به شکل نمودار، تابع در همسایگی $x = ۰$ صعودی است، بنابراین a و b باید هم‌علامت باشند: $\Rightarrow b = -۳ \xrightarrow{a=-۱} a + b = -۴$

دقت کنید که مقدار انتقال افقی در بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ است، بنابراین بررسی کردن یکنوایی آن در همسایگی $x = ۰$ برای تعیین علامت‌های a و b کافی است.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

$$y = a - \frac{۱}{۲}(\frac{۱-\cos ۲bx}{۲}) = \frac{۱}{۴}\cos ۲bx + a - \frac{۱}{۴}$$

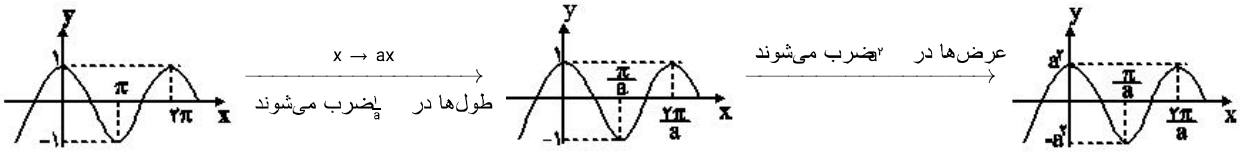
$$\begin{cases} y_{max} = \frac{۱}{۴} + a - \frac{۱}{۴} = a = ۱ \Rightarrow a = ۱ \\ T = \frac{۲\pi}{۲|b|} = \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = ۰ \text{ یا } ۲$$

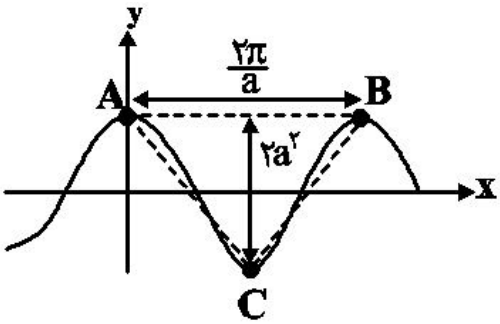
سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم می‌کنیم:



حال برای مساحت مثلث ABC داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{\frac{2\pi}{a}\times 2a^2}{2} = 8\pi \xrightarrow{a>0} 2\pi a = 8\pi \Rightarrow a = 4$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

در توابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ، فاصله افقی دو نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی‌اش برابر نصف دوره تناوب تابع است. بنابراین در این سؤال $\frac{T}{2} = 2\pi$ است. $\Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

هم‌چنین داریم: $c = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} \Rightarrow c = \frac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)}{2} = -1$

از طرفی برای به‌دست آوردن a نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$y_{max} = |a| + c = |a| - 1 \xrightarrow{y_{max}=\frac{1}{2}} |a| = \frac{3}{2}$$

حال با توجه به اینکه در همسایگی $x = 0$ ، تابع f نزولی است، باید ab مقداری منفی داشته باشد. بنابراین ضابطه تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = -\frac{3}{2}\sin\frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6} - 1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

$\max(f) = ۲ \Rightarrow a + |b| = ۲(۱)$

$\min(f) = -۴ \Rightarrow a - |b| = -۴(۲)$

$\xrightarrow{(۱),(۲)} |b| = ۳\ ,\ a = -۱$

دوره تناوب تابع برابر ۴ است، پس داریم:

$\frac{۲\pi}{|c|} = ۴ \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{۲}$

با توجه به نمودار باید $bc > ۰$ باشد، پس هر دو حالت $\begin{cases} b = ۳ \\ c = \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ یا $\begin{cases} b = -۳ \\ c = -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ قابل قبول است. بنابراین ضابطه f به‌صورت $f(x) = -۱ + ۳\sin\frac{\pi x}{۲}$ است و داریم:

$f\left(\frac{۳۱}{۳}\right) = -۱ + ۳\sin\frac{۳۱\pi}{۶} = -۱ + ۳\sin\left(۵\pi - \frac{\pi}{۶}\right)$

$= -۱ - ۳\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -۱ - ۳\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۵}{۲}$

سوال ۱۰

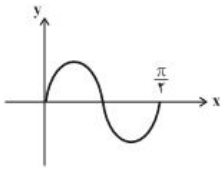
پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$y = \sin x\cos x\left(\cos^۲ x - \sin^۲ x\right) = \frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x$

$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\sin ۴x\right) \Rightarrow y = \frac{۱}{۴}\sin ۴x$

دوره تناوب این تابع $T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$ است. پس نمودار آن در بازه $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ به‌صورت زیر است.



از آنجا که بازه $[۰, \pi]$ شامل ۲ دوره تناوب تابع است، نمودار گزینه «۳» پاسخ صحیح است.